

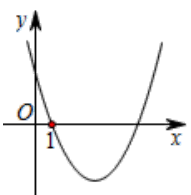
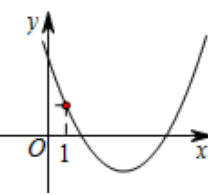
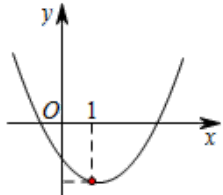
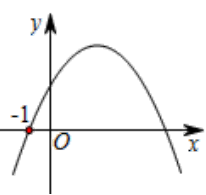
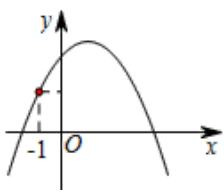
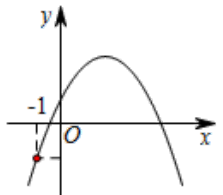
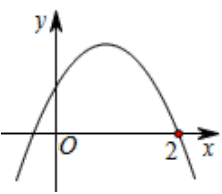
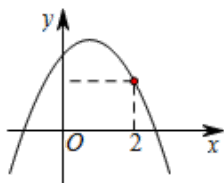
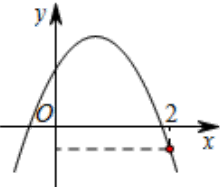
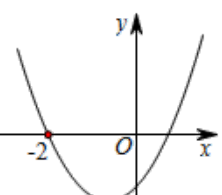
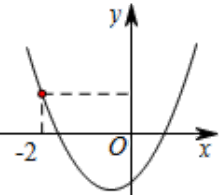
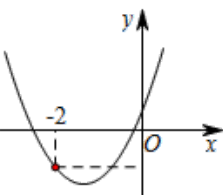
第2讲 二次函数图象专题（一）

一、 a 、 b 、 c 、 Δ 、特殊值的符号

1. a 、 b 、 c 、 Δ

二次函数： $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$			
	推导	字母的符号	图象特征
开口方向	a	$a > 0$	开口向__
		$a < 0$	开口向__
对称轴 $x = \underline{\hspace{2cm}}$	b	$b = 0$	对称轴为_____
		$ab > 0$ (a 、 b __号)	对称轴在 y 轴的__
		$ab < 0$ (a 、 b __号)	对称轴在 y 轴的__
		总结：_____	
与 y 轴交点	c	$c = 0$	图象过_____
		$c > 0$	与 y 轴的交点在 y 轴的__ _____
		$c < 0$	与 y 轴的交点在 y 轴的__ _____
与 x 轴交点	$b^2 - 4ac$	$b^2 - 4ac = 0$	与 x 轴有唯一交点（抛物线顶点落在 x 轴）
		$b^2 - 4ac > 0$	与 x 轴有_____交点
		$b^2 - 4ac < 0$	与 x 轴__交点

2. 二次函数特殊值

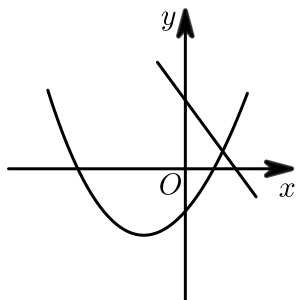
代数式值	自变量取值	图象举例		
$a + b + c$	_____	 $a + b + c$ ____ 0	 $a + b + c$ ____ 0	 $a + b + c$ ____ 0
$a - b + c$	_____	 $a - b + c$ ____ 0	 $a - b + c$ ____ 0	 $a - b + c$ ____ 0
$4a + 2b + c$	_____	 $4a + 2b + c$ ____ 0	 $4a + 2b + c$ ____ 0	 $4a + 2b + c$ ____ 0
$4a - 2b + c$	_____	 $4a - 2b + c$ ____ 0	 $4a - 2b + c$ ____ 0	 $4a - 2b + c$ ____ 0

🧠 举个“栗”子

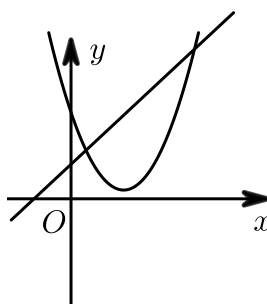
栗子1

1. 函数 $y = ax + b$ 和 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一平面直角坐标系内的图象大致是 () .

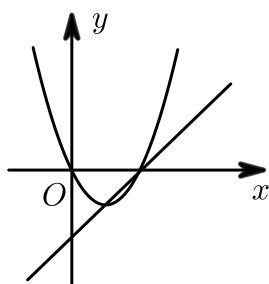
A.



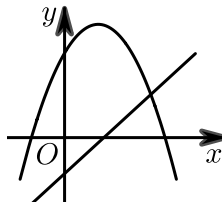
B.



C.

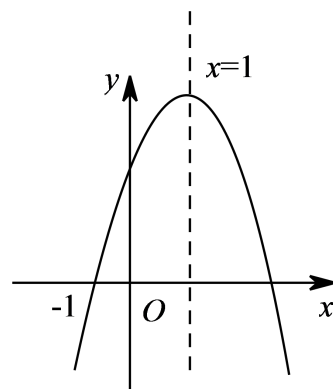


D.



栗子2

2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 有下列4个结论: ① $abc > 0$; ② $b < a + c$; ③ $4a + 2b + c > 0$; ④ $b^2 - 4ac > 0$; 其中正确的结论有 () .



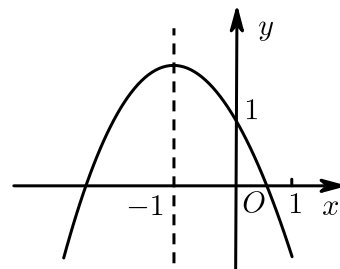
A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

3. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $(0, 1)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，下列结论：① $a + b + c < 0$ ；② $a - b + c > 1$ ；③ $abc > 0$ ；④ $4a - 2b + c < 0$ ；⑤ $c - a > 1$ ，其中正确的序号为（ ）。



A. ②③④⑤

B. ①③④⑤

C. ①②④⑤

D. ①

二、 a 、 b 、 c 、最值、平方差之间的关系

1. a 、 b 之间的关系

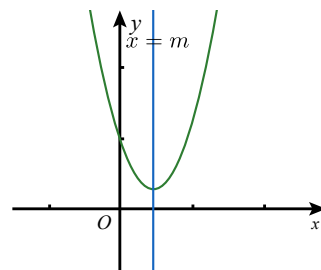
利用二次函数对称轴为：_____推导。

例如：

已知函数对称轴为 m ，则令 $-\frac{b}{2a} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，即可得到_____。

□思考：

若将条件改为：已知函数对称轴在 $(m, 0)$ 的右侧，应该如何推导。



2. a 、 c 之间的关系

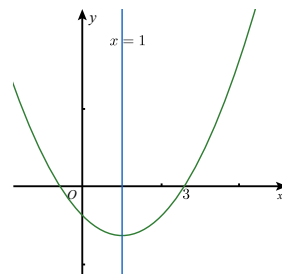
①先根据对称轴求出_____的等量关系，然后在特殊值中将_____进行替换。

例如：

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(3, 0)$ ，对称轴为 $x = 1$ ，求 a 、 c 之间的关系。

由对称轴为 $x = 1$ 可得，_____；由过点 $(3, 0)$ ，可得_____；

将_____代入到等式中，即可得到_____。



②若已知二次函数与 x 轴的两个交点坐标，可直接利用韦达定理_____。

如上述问题，可直接由 $x_1x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ，得_____。

3. b 、 c 之间的关系

经过了上述内容的学习，求解 b 、 c 之间的关系与上述方法类似，在特殊值中替换___即可。

4. 二次函数的最值

□知识回顾：

二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点坐标为_____。

当自变量取值范围为全体实数时，二次函数的最值一定在_____处取得：

开口向_____时，二次函数有最_____值；开口向_____时，二次函数有最_____值。

！总结：

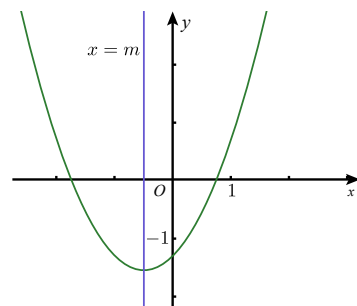
①最小值意味着比所有的函数值都_____；同理最大值意味着比所有的函数值都_____；因此根据图象，可比较最值与其余函数值的大小关系。

②当题目中出现 $b^2 - 4ac$ 时，除了要考虑_____外，二次函数中顶点纵坐标_____也含有这个形式；因此根据图象中二次函数最值的位置，可利用最值的意义求出 $b^2 - 4ac$ 与 a 或其它参数的关系。

例如：

如图可得，①_____ $< a + b + c$

②_____ < -1



5. 平方差

□知识回顾：

平方差公式： $a^2 - b^2 =$ _____。

栗子3

4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，当 $x < -1$ 时， y 随着 x 的增大而减小。有下列结论：

① $abc > 0$ ；

②若点 $A(-3, y_1)$ ，点 $B(3, y_2)$ 都在抛物线上，则 $y_1 < y_2$ ；

③ $a + b > 0$ 。其中，正确结论的个数为()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 与 $(0, -3)$ 之间（不包括这两点），对称轴为直线 $x = 2$ 。

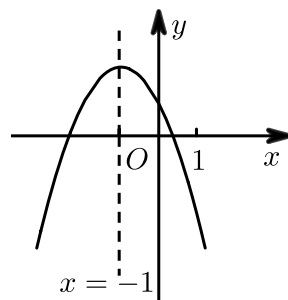
下列结论：① $abc > 0$ ；② $9a + 3b + c < 0$ ；③ 若点 $M\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$ ，点 $N\left(\frac{5}{2}, y_2\right)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1 < y_2$ ；④ $-\frac{24}{5} < a + b + c < -\frac{16}{5}$ 。其中正确结论的个数是（ ）。

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

栗子4

6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图，给出下列四个结论：

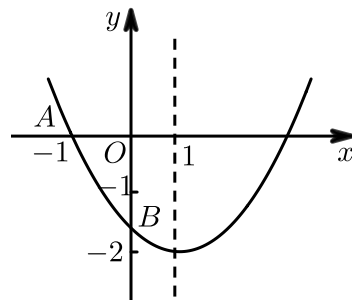
① $4ac - b^2 < 0$ 。② $4a + c < 2b$ 。③ $3b + 2c < 0$ 。④ $m(am + b) + b < a(m \neq -1)$ ，其中正确结论的个数是（ ）。



- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

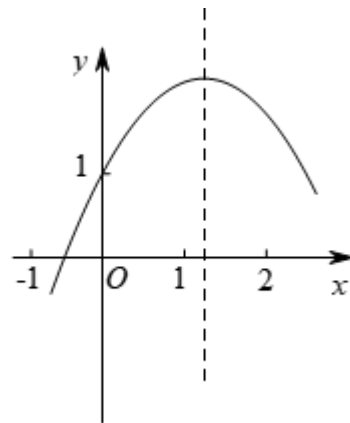
栗子5

7. 如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 和 $(0, -1)$ 之间（不包含这两点），对称轴为直线 $x = 1$ 。在下列结论中：① $abc > 0$ ；② $16a + 4b + c < 0$ ；③ $4ac - b^2 < 8a$ ；④ $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$ ；⑤ $b < c$ 。正确结论的个数为（ ）。



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示, 在下列五个结论中: ① $abc < 0$; ② $4a + 2b + c > 0$; ③ $(a + c)^2 < b^2$; ④ $2a - b < 0$ 正确的有 () 几个.



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个
9. 已知: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 经过点 $(-1, 0)$, 且满足 $4a + 2b + c > 0$, 以下结论: ① $a + b > 0$; ② $a + c > 0$; ③ $-a + b + c > 0$; ④ $b^2 - 2ac > 5a^2$, 其中正确的有 ().
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

三、 x 轴交点距离、线段关系

1. x 轴交点距离

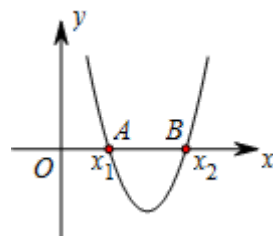
□知识回顾:

当 $\Delta > 0$ 时, 求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标:

即令 _____, 可得: $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____

因此, x 轴两个交点的距离:

$|x_1 - x_2| =$ _____

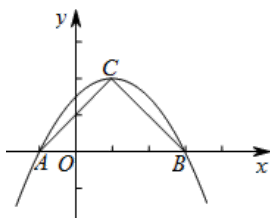


抛物线与轴交点和顶点构成特殊三角形：

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，点 C 是抛物线的顶点。

① 当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，则 $\Delta =$ _____；

② 当 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $\Delta =$ _____。



依题可知 C _____, $AB =$ _____.

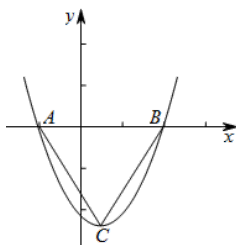
当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形时，则 _____

$$\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|},$$

整理得, $\frac{b^2 - 4ac}{|2a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$, 即

$$\Delta = 2\sqrt{\Delta}, \quad \text{_____},$$

$\because \Delta > 0, \therefore$ _____.



当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，则 $\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| =$ _____

$$\times \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|},$$

整理得, $\frac{b^2 - 4ac}{|4a|} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$, 即

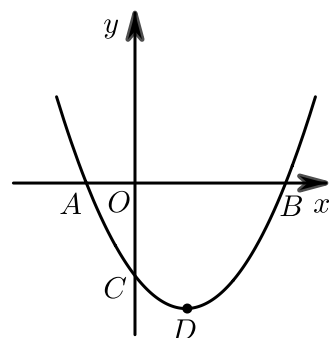
$$\Delta = 2\sqrt{3} \times \sqrt{\Delta}, \quad \text{_____},$$

$\because \Delta > 0, \therefore$ _____.

10. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象的顶点为 D ，其图象与 x 轴的交点 A 、 B 的横坐标分别为 -1 ， 3 ，与 y 轴负半轴交于点 C ．在下面四个结论中：

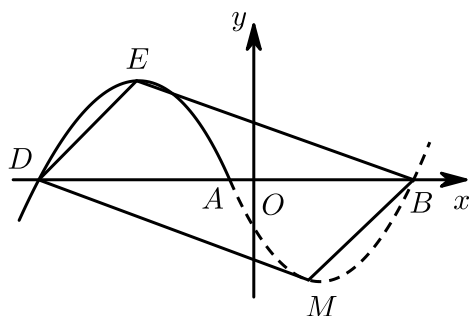
- ① $a + b + c < 0$ ；
- ② $a = -\frac{1}{3}c$ ；
- ③ 只有当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形；
- ④ 使 $\triangle ACB$ 为等腰三角形的 a 值可以有两个．

其中正确的结论有（ ）．



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

11. 如图，已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧）， M 为顶点，将抛物线 C_1 绕点 A 旋转 180° ，得抛物线 C_2 ，点 B ， M 旋转后的对称点为 D ， E ．若四边形 $DMBE$ 为矩形，则 $b^2 - 4ac$ 的值是（ ）．

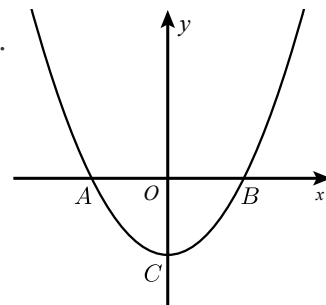


- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18

2. 线段关系

如右图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与坐标轴交于 A 、 B 、 C 三点。

- ①若 $OA = OC$ ，则 $C(\quad)$ ， $A(\quad)$
 ②若 $OB = OC$ ，则 $C(\quad)$ ， $B(\quad)$

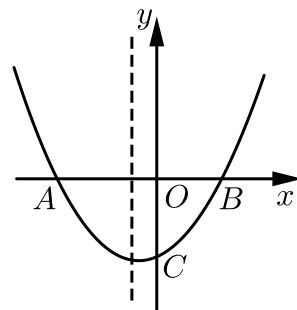


栗子8

12. 如图抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$) 的图象交 x 轴于 $A(-2, 0)$ 和点 B ，交 y 轴负半轴于点 C ，且 $OB = OC$ ，下列结论：

- ① $c = 2b - 2$ ；② $a = \frac{1}{2}$ ；③ $b = ac + 1$ ；④ $\frac{a+b}{c} < 0$ 。

其中正确的个数是 ()。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4